PREPRINT. Please refer to the final version in: Conceptus XXXIX.95 (2010): 31-60.

Deduktive Begründung

Zu einem Explikationsvorschlag von Reinhard Kleinknecht

OS CorGlaReiSie[1]

Abstract

In his paper "Deduktive Begründung und deduktive Ableitung" Reinhard Kleinknecht offers an explication of the concepts of *deductive reason* and *deductive argument* respectively. To this end, he provides seven conditions that he sees as individually necessary and jointly sufficient for being a deductive reason. We discuss Kleinknecht's definition and argue that some of his conditions are far too restrictive and that his concept of deductive argument is therefore to narrow to capture the usual practice of deductively establishing propositions as true. We also discuss some other aspects that seem problematic to us or that do not appear to meet Kleinknecht's own standards. Finally, we ask what purposes Kleinknecht's explication is supposed to serve and why one might want to introduce such a narrow concept of deductive argument.

REINHARD KLEINKNECHT (=RK) schlägt in seinem 2006 erschienenen Aufsatz "Deduktive Ableitung und deduktive Begründung"[2] eine Explikation des Begriffs der deduktiven Begründung vor. Die in der Folge vorgetragenen Überlegungen formulieren bei der Lektüre zwanglos aufkommende Fragen. Deren Beantwortung könnte helfen, den mit der erwähnten Charakterisierung verfolgten Zweck und die zu seiner Herbeiführung ergriffenen Mittel besser zu verstehen.

Zunächst sind Lauf und Ergebnis der Untersuchung in Kürze vorzustellen (§1). Die Hauptexplikation fügt acht Bedingungen zusammen. Es ergeben sich Fragen, die einzelne Bedingungen betreffen (§2-§6), und solche, die nicht auf einzelne Forderungen beschränkt sind (§7). Abschließend ist einigen Vermutungen zu Anlass, Vorgehen und Zweck des Vorschlags Raum zu geben (§8). – Ein Anhang stellt Detailüberlegungen zusammen.

---

[1] Der Text fasst die Erörterung des Vorschlags von REINHARD KLEINKNECHT in einem von MORITZ CORDES, JENS GLATZER, FRIEDRICH REINMUTH und GEO SIEGWART im Sommersemester 2010 gemeinsam durchgeführten Seminar an der Universität Greifswald zusammen.

[2] Alle nicht weiter ausgewiesenen Seitenangaben beziehen sich auf diesen Text.

§1
Lauf und Ergebnis der Explikation

RK geht von folgender Feststellung zum Verhältnis von deduktiver Ableitung und deduktiver Begründung aus: "Jede deduktive Begründung ist eine deduktive Ableitung, aber das Umgekehrte ist nicht der Fall" (S.17). Er stellt sich die Aufgabe, diejenigen Bedingungen namhaft zu machen, "die eine deduktive Ableitung zu einer deduktiven Begründung machen" (ebd.). Der Autor präzisiert sein Ziel so: "Wir wollen nun explizieren, was es heißt, dass eine Satzmenge T einen *deduktiven Grund für* einen Satz A bildet" (S.20).

Die zitierte Formulierung des Explikandums veranlasst Zwischenbemerkungen: (i) RK bestimmt zunächst die deduktive *Begründung*, dann aber den deduktiven *Grund* als zu charakterisierende Größe. Man darf aber wohl von der stillschweigenden Unterstellung des folgenden Zusammenhangs ausgehen: Eine Satzsequenz soll genau dann eine deduktive Begründung von A aus T sein, wenn sie eine Ableitung von A aus T ist und T einen deduktiven Grund für A darstellt. Diese Möglichkeit des Übergangs wird auch in der Folge benutzt. – (ii) Eine Quisquilie zur Wortwahl: Das, was in der Zielformulierung unter dem Titel des deduktiven Grundes steht, ist eine *Menge* von Sätzen. Üblicherweise werden die *einzelnen Mitglieder* solcher Mengen, also Sätze, als Grund angesprochen; diese Verwendungsgepflogenheit findet sich auch bei RK (S.23). Wollte man es vermeiden, gegen die Üblichkeit anzusprechen, dann sollte man 'Grund' durch 'Basis' oder 'Fundament' ersetzen und die Elemente der Basis als Gründe führen.

Mit dem eingangs beschriebenen Verhältnis von deduktiver Ableitung und deduktiver Begründung steht die erste und unstrittige Bedingung für die deduktive Grundschaft bereits fest. B1 lautet: *A ist aus T deduktiv ableitbar*. Durch die Hinzufügung weiterer notwendiger Bedingungen soll sich insgesamt eine hinreichende Bedingung ergeben. Bei der Findung dieser Forderungen orientiert der Autor sich vor allem an geometrischen Beweisen und geometrischen Axiomensystemen, insbesondere an einem geometrischen Miniatursystem (S.21f).

Wenig Anlass zur Debatte dürfte auch die zweite Bedingung bieten. B2 verlangt die *Konsistenz des deduktiven Grundes* (S.21). – Unter Verweis auf die Möglichkeit der

Überprüfung fordert RK in B3 die *Endlichkeit des Grundes*; und um logische Beweise, d.h. Beweise aus der leeren Menge, als deduktive Begründungen auszuschließen, wird *Nichtleerheit* angesetzt (S.22f). Die letzte Teilforderung erweist sich wegen B7 als überflüssig (S.29, Fn6).

Die Bedingung B4 zielt auf den Ausschluss deduktiv überflüssiger Mitglieder des Grundes, solcher Elemente also, die sich aus anderen Grundelementen herleiten lassen und den Grund insgesamt abhängig machen. Verlangt man durch B4, dass *eine Aussage A aus keiner echten Teilmenge von T* folgt, dann ist die Unabhängigkeit von T im Zusammenspiel mit B1 garantiert (S.23f). B1 und B4, A folgt aus T, aber *aus* keiner echten Teilmenge von T, wird in der Folge auch als Non-Redundanz von T bezüglich A angesprochen. – Zum Ausschluss (einer Sorte) von Selbstbegründungen, setzt der Autor sodann B5: *Kein Satz aus T und keine Konjunktion von Sätzen aus T ist logisch äquivalent mit A* (S.24f).

Wiederum mit Blick auf Axiomensysteme verlangt RK mit B6, dass *kein Satz aus der Basis T Konjunktionscharakter hat*. Die letztgenannte Eigenschaft kommt genau den Sätzen zu, die Konjunktionen oder (einfach) negierte Konditionale oder (einfach) negierte Adjunktionen sind (S.24f). – Aus dem Gedanken, dass in einer deduktiven Begründung mehrere Prämissen verarbeitet werden müssen, zieht der Autor die Bedingung B7: *Der Grund T enthält mindestens zwei Sätze* (S.26).

Die letzte Bedingung geht erneut auf den Ausschluss (einer weiteren Sorte) von Selbstbegründungen. Zielkonzept ist zunächst der Begriff des *Teilinhalts*. Als Teilinhalt einer Aussage soll eine mit der Aussage mitbehauptete Aussage gelten: Wer etwa eine Konjunktion behauptet, soll damit jedes logisch-indeterminierte Konjunktionsglied mitbehaupten. Die begriffliche Fassung dieser Idee nimmt ihren Weg über das Konzept des *Prämissenminimums:* Ist (a) T eine Hintikkamenge, (b) A aus T ableitbar und hat (c) T keine Hintikkamenge T' zur echten Teilmenge, aus der A ableitbar ist, dann und nur dann ist T Prämissenminimum für A. Unter Benutzung dieser Hilfsexplikation lässt sich bestimmen: Es ist B ein Teilinhalt von A genau dann, wenn (a) B aus A ableitbar ist, (b) B nicht logisch beweisbar ist, es ferner (c) sowohl für A als auch für B ein Prämissenminimum gibt und (d) jedes

Prämissenminimum für B aus einem Prämissenminimum für A folgt. Damit lässt sich B8 formulieren: *Kein Teilinhalt von A folgt aus einem Satz aus T* (S.28). – Insgesamt lässt sich dann der Begriff des deduktiven Grundes so explizieren (S.29):

T ist ein deduktiver Grund für A (kurz: $T \rhd A$)

gdw

B1 $T \vdash A$;

B2 T ist konsistent;

B3 T ist eine endliche Menge;

B4 A ist nicht aus einer echten Teilmenge von T ableitbar;

B5 kein Satz aus T und auch keine Konjunktion von Sätzen aus T ist logisch äquivalent mit A;

B6 kein Satz aus T hat Konjunktionscharakter;

B7 T enthält mindestens zwei Sätze;

B8 kein Teilinhalt von A ist aus einem Satz von T ableitbar.

Auf der Grundlage dieser Definition werden die folgenden Zusammenhänge zwischen deduktiver Ableitbarkeit und deduktivem Grund nachvollziehbar (S. 29):

(1) Wenn $T \rhd A$, dann $\nvdash A$ und $\nvdash \neg A$.

(2) $T, A \wedge B \not\rhd A$.

(3) $T, A \not\rhd A \vee B$.

(4) $T, A, \neg A \not\rhd B$.

(5) $T, A \not\rhd A$.

(6) Aus $T \rhd A$ und $T \subset T'$ folgt nicht $T' \rhd A$.[3]

(7) Aus $T, A \rhd B$ folgt nicht $T \rhd A \rightarrow B$.

[3] (6) Kann verstärkt werden zu: Aus $T \rhd A$ und $T \subset T'$ folgt $T' \not\rhd A$.

§2
Die Forderung nach Non-Redundanz

Über die Forderung B4 ist (mit B1) die Unabhängigkeit des deduktiven Grundes garantiert. Es ist umgekehrt eine Satzmenge bereits dann kein deduktiver Grund, wenn eines ihrer Elemente sich aus anderen ableiten lässt. – Zunächst: Im faktischen deduktiven Begründen ist es nicht verwerflich, mit abhängigen Basen zu arbeiten. Wer würde etwa daran Anstoß nehmen, wenn man in den Anfängen der elementaren Arithmetik die Aussage '$\bigwedge x(\bigwedge y(y < x \vee x = y) \rightarrow \bigwedge y(\neg x < y))$' durch Anziehung sowohl eines Asymmetrie-Axioms '$\bigwedge x \bigwedge y(x < y \rightarrow \neg y < x)$' als auch der aus diesem folgenden Aussage '$\bigwedge x \bigwedge y(x = y \rightarrow \neg x < y)$' beweist? Warum sollte man das Konzept der deduktiven Begründung so fixieren, dass derartige Beweise nur mehr Scheinbegründungen sind? Warum sollte der auf arithmetischer Objektebene operierende kognitive Agent überhaupt daran interessiert sein, unbedingt eine deduktive Begründung im Sinne von RK vorzulegen?

Sodann: Es ist nicht unüblich, mengentheoretische Axiomensysteme mit abhängigen Axiomenmengen zu präsentieren. Es kommt eben manchmal darauf an, *für die Handhabung* einfache Aussagen in die Beweise einspeisen zu können. Wer Aussagen im Wege des Beweisens als wahr etablieren möchte, dem ist nicht, jedenfalls nicht primär, daran gelegen, dass die Aussagenmenge, auf deren Elemente er zurückgreift, unabhängig ist. Wäre die Deduktionsbasis inkonsistent, dann wäre die Erreichung des Erkenntnisziels gefährdet; die Abhängigkeit bringt dieses Risiko nicht mit sich.

Schließlich: Sowohl die (ältere) Geschichte der Geometrie als auch die (neuere) Geschichte der Mengentheorie lassen erkennen, dass die Untersuchung von Axiomenmengen auf (Un-)Abhängigkeit zu den anspruchsvollen metatheoretischen Aufgaben zählt. Man wird also oft nicht ohne weiteres beurteilen können, ob ein vorgelegter Beweis auch eine deduktive Begründung in dem von RK angezielten Sinn ist; und deshalb wären wohl viele Autoren auch häufig außerstande, die – von RK natürlich nicht formulierte – Maxime 'Wann immer Du Dich ans Begründen machst: Begründe deduktiv!' bewusst zu befolgen.

Insgesamt: Wenn man B4 akzeptiert, wird man erstens einen erheblichen Teil der bewährten Beweispraxis nicht als deduktive Begründungspraxis ansprechen können; und zweitens wird es häufig nicht umstandslos möglich sein, darüber zu befinden, ob ein vorgelegter Beweis eine deduktive Begründung ist oder nicht.

§3
Die Forderung nach Non-Zirkularität

B5 verlangt, dass kein Grund und auch keine Konjunktion von Gründen, das Wort 'Grund' in der üblichen Bedeutung gelesen, mit der Konklusion äquivalent ist. Unterstellt man, dass der Ausschluss der Zirkularität letztlich dadurch zu motivieren ist, dass eine Begründung einer Aussage A nicht auf Aussagen zurückgreifen darf, die ihrerseits im Rückgriff auf A begründet werden, dann erscheint es fraglich, ob man zum Ausschluss von Zirkularität bei Äquivalenzbeziehungen zwischen Gründen und Konklusion ansetzen sollte. Dass ein Grund oder die Konjunktion mehrerer Gründe mit der Konklusion äquivalent sind, schließt ja nicht aus, dass (i) die Gründe ohne Rückgriff auf die Konklusion verfügbar gemacht worden sind und (ii) die Konklusion tatsächlich einen Erkenntnisgewinn darstellt (vgl. dazu S. 22 oben, S. 25 Mitte). Sollte man stattdessen das Zirkularitätsproblem nicht eher direkt mit Blick auf die Verfügbarkeit von Aussagen angehen? Könnte man nicht nahe liegender Weise fordern, dass alle benutzten Prämissen axiomatisch oder definitorisch gesetzt oder bereits bewiesen worden sein müssen? Würde eine solche Forderung nicht eher die gängige Beweispraxis erfassen?

Abgesehen davon erzwingt diese Fassung des Zirkularitätsverbots, dass man oft nur schwächere Konklusionen folgern darf, als man eigentlich könnte. So wäre etwa {'Hans singt', 'Wenn Hans singt, dann weint Inge'} ein deduktiver Grund für 'Inge weint', aber dieselbe Aussagenmenge wäre kein deduktiver Grund für die Aussage 'Hans singt und Inge weint'. Dies gilt aber unabhängig von der Non-Zirkulariätsklausel auch wegen der Teilinhaltsklausel.

§4
Die Forderung nach Konjunktionsausschluss

Nach B4, der Forderung nach Non-Redundanz, ist die Menge $\{p,\ q,\ q\rightarrow\ r\}$ kein deduktiver Grund für r: p wird zur Ableitung von r nicht benötigt. Hingegen gilt $\{p \wedge q,\ q \rightarrow r\}$ nach den bisherigen Festlegungen als deduktiver Grund für r. RK nimmt diese Ungleichbehandlung derart ähnlicher bzw. äquivalenter Satzmengen zum Anlass, Konjunktionen aus den Gründemengen mittels B6 auszuschließen: Kein Satz aus T hat Konjunktionscharakter (S.25). – Sätze haben erinnerlich Konjunktionscharakter genau dann, wenn sie Konjunktionen, (einfach) negierte Konditionale oder (einfach) negierte Adjunktionen sind (ebd.).

Zunächst: Es ist die Menge $\{q,\ q \rightarrow r\}$ ein deduktiver (Muster-)Grund für r. Die Menge $\{p \wedge q,\ p \wedge q \rightarrow r\}$ bildet jedoch trotz gleicher Hauptstruktur – Konditional mit seinem Antezedens als Elemente – keinen deduktiven Grund für r. Sollte man dann von $\{p \wedge q,\ p \wedge q \rightarrow r\}$ zunächst zu $\{p,\ q,\ p \wedge q \rightarrow r\}$ übergehen und das Begründungsgeschäft erst dann aufnehmen? Aber wodurch wäre es attraktiv oder gar notwendig, das deduktive Begründen im explizierten Sinne dem »bloßen« Begründen vorzuziehen? Man betrachte dazu die folgende alltagsnahe Satzsequenz: Wenn Hans die Hausaufgaben erledigt und das Fahrrad geputzt hat, dann hat Hans frei. Nun hat Hans seine Hausaufgaben erledigt und das Fahrrad geputzt. Mithin, so folgert er, hat er jetzt frei. – Es ist jedenfalls zu fragen, ob die anvisierte Relation des deduktiven Grundes nicht intuitiv unvollständig wird, wenn derartige Sequenzen ausgeschlossen werden.

Sodann: Es bleibt, zufolge der Bestimmung des Konjunktionscharakters von Sätzen, die Menge $\{\neg\neg(p \wedge q),\ p \wedge q \rightarrow r\}$ ein deduktiver Grund von r. Wäre dann eine Ableitung, die mit dem *duplex negatio affirmat* zu $p \wedge q$ übergeht, um dann mit *modus ponens* auf r zu schließen, eine deduktive Begründung von r, während man das für den letzten Schritt allein nicht sagen kann? – Im Übrigen bleiben auch $\{\neg\neg\neg(\neg p \vee \neg q),\ q \rightarrow r\}$, $\{\neg\neg\neg(p \rightarrow \neg q),\ q \rightarrow r\}$ sowie $\{\neg\neg(p \wedge q),\ q \rightarrow r\}$ deduktive Gründe für r.

Allgemeiner stellt sich die Frage, was eigentlich der von RK anvisierte Adäquatheitsmaßstab seiner Charakterisierung von Sätzen mit Konjunktionscharakter sein soll. RK scheint seine Definition, oberflächlich gesehen, damit zu rechtfertigen, dass die so ausgezeichneten Sätze "mit Konjunktionen logisch äquivalent sind" (S. 25). Andererseits ist nicht davon auszugehen, dass er die logische Äquivalenz mit Konjunktionen als hinreichende oder aber nicht-triviale notwendige Bedingung dafür ansehen möchte, dass ein Satz Konjunktionscharakter hat, denn schließlich ist jede Formel zu einer Konjunktion äquivalent. Die Frage, welche Formeln mit der Definition eigentlich erfasst werden sollen, scheint sich also allein aus dem Text nicht beantworten zu lassen.

Die von RK für B6 vorgelegte Plausibilisierung ist wiederum vollständig an der geometrischen Miniatur und insoweit am axiomatischen Szenario (in seinem Anfangsstadium) orientiert (S.24f). (i) Wenn man eine geometrische oder sonst eine axiomatische Theorie aufbaut, gibt man die Axiome als einzelne an – und nicht in ihrer konjunktiven Zusammenfassung. Aber was folgt aus diesem Vorgehen für das deduktive Begründen in irgendeinem abgelegenen Zweig der geometrischen (oder sonst einer axiomatischen) Theorie? Für das deduktive Begründen ganz allgemein ist überdies die hochstilisierte axiomatische Umgebung nicht unvermeidlich: Vergleiche, wie Hans sich und möglichen Opponenten nachweist, dass er jetzt frei hat. (ii) Auch wenn man den genuin metatheoretischen Zweck verfolgt, ein Axiomensystem auf (Un-)Abhängigkeit zu untersuchen, startet man von den einzelnen Axiomen. Was aber trägt dieser Umstand für das deduktive Begründen *innerhalb* des Systems oder gar für das deduktive Begründen schlechthin aus?

§5
Die Forderung nach mindestens zwei Sätzen

Die Forderung nach mindestens zwei Sätzen, B7, lautet: Der deduktive Grund T enthält mindestens zwei Sätze (S.26). – Die Plausibilisierung (S.25) setzt ein mit der Frage nach der Anzahl der Elemente des Grundes: Nach B3 ist die Anzahl endlich; und der Autor erwähnt ferner den Ausschluss der konjunktiven Präsentation durch B6. Der anschließenden Überlegung sind zwei Gedanken zu entnehmen: (i) Gründe mit nur einer Prämisse sollen keine deduktiven Gründe sein. (ii) Falls ein Grund mehrere Prämissen hat, sollen alle diese Prämissen an der Ableitung beteiligt sein. – Es bleibe dahin gestellt, ob diese Forderung mit B7 aufgenommen wird.

Zu (i): Die Einermenge $\{p\}$, so das für RK paradigmatische Gegenbeispiel, soll kein deduktiver Grund für das Konditional $q \rightarrow\ p$ sein – obwohl p doch beim Ableiten "irgendwie ‘verarbeitet'" (S.25) wird und die Ableitung, wenigstens für logische Novizen, "erkenntnismäßig etwas Neues" enthält (ebd.). Wie müssten die zitierten Wendungen verstanden werden, damit die betrachtete Ableitung ein Gegenbeispiel für die genannten Beziehungen wird?

An einem Beispiel: Angenommen, man will zeigen, dass die Menge $\{p\}$ eine aussagenlogische Hintikkamenge ist (vgl. die Definition S.27). Nachdem man nachgewiesen hat, dass die Bedingung a) für beliebig, aber fest gewähltes A zutrifft, fährt man so fort: Da es nicht der Fall ist, dass die Negation der Negation von A Element von $\{p\}$ ist, resultiert: Wenn die Negation der Negation von A Element von $\{p\}$ ist, dann ist A Element von $\{p\}$. Nach B7 wird aber ausgeschlossen, dass $\{\neg q\}$ deduktiver Grund von $q \rightarrow s$ ist. Die weiteren Definienskonjunkte der Hintikkamenge würden ebenfalls nach diesem Muster nachgewiesen; und Definitionen nach dem Muster der Charakterisierung der Hintikkamenge sind in formalen Kontexten gang und gäbe. Warum aber sollen Kernvollzüge unserer Deduktionspraxis nicht als deduktive Begründungen anerkannt werden? Warum soll die betrachtete Ableitbarkeitsrelation nicht als deduktive Begründungsrelation gelten dürfen? Erzwingt B7 nicht die Unvollständigkeit der angebotenen Explikation?

§6
Die Forderung der Nicht-Ableitbarkeit der Teilinhalte

Gemäß B8, der Forderung der Nicht-Ableitbarkeit der Teilinhalte, darf, wenn es sich um eine deduktive Begründung eines Satzes aus einer Prämissenmenge handeln soll, kein Teilinhalt des zu begründenden Satzes aus einem Element dieser Prämissenmenge folgen. Auf diese Weise sollen "partielle Selbstbegründungen" (vgl. S.26), bei denen die Konklusion nicht ausschließlich durch eine entsprechende "Verhackstückelung" (S.25) der Prämissen zustande kommt, ausgeschlossen werden. Entsprechend ist {'Hans singt', 'Wenn Hans singt, dann weint Inge', 'Fritz lacht'} kein deduktiver Grund für den Satz 'Inge weint und Fritz lacht' – schließlich wird eine Prämisse in gewisser Hinsicht nicht weiter "verarbeitet" (S.25), sondern lediglich zur Konklusion »durchgereicht«. Derartige Begründungen sind jedoch durchaus gängige Praxis und werden oft als völlig unproblematisch akzeptiert. Somit stellt sich die Frage, ob die angestrebte Explikation tatsächlich solche Fälle als nicht-einwandfreie deduktive Begründungen diskreditieren sollte.

Überträgt man die Teilinhaltsforderung in nahe liegender Weise auf prädikatenlogische Zusammenhänge, dann ist ferner die Menge {'Es gibt mindestens zwei Punkte', 'Zwei verschiedene Punkte liegen auf genau einer Linie'} aus MG1 und MG2, den ersten beiden Axiomen der Miniaturgeometrie (vgl. S.21), kein deduktiver Grund für den Satz 'Es gibt einen Punkt und eine Linie, auf welcher der Punkt liegt'. Der Grund hierfür ist, dass der Satz: 'Es gibt einen Punkt' Teilinhalt der Konklusion ist und zugleich aus {MG1} folgt.[4] Es gibt also einen Teilinhalt der Konklusion, der aus einem Satz der Prämissenmenge folgt. Ist bei diesem Beispiel also von einer nicht ordnungsgemäßen "Verhackstückelung" der Prämissen auszugehen? Da ferner geometrische Beweise paradigmatische Fälle deduktiver Begründungen sein sollen (vgl. S.21), könnte das Beispiel nicht auch als Indiz für die Unvollständigkeit der vorgelegten Explikation angesehen werden?

---

[4] Dabei wird für MG1 ('Es gibt mindestens zwei Punkte') die Formalisierung '$\bigvee x \bigvee y$(Punkt(x) $\wedge$ Punkt(y) $\wedge$ $\neg x = y$)', für MG2 ('Zwei verschiedene Punkte liegen auf genau einer Linie') die Formalisierung '$\bigwedge x \bigwedge y$((Punkt(x) $\wedge$ Punkt(y) $\wedge$ $\neg x = y$) $\rightarrow$ $\bigvee v \bigwedge w$(Linie(w) $\wedge$ Liegt-auf(x, w) $\wedge$ Liegt-auf(y, w) $\leftrightarrow$ $w = v$))' und für 'Es gibt einen Punkt und eine Linie, auf welcher der Punkt liegt' die Formalisierung '$\bigvee x \bigvee y$(Punkt(x) $\wedge$ Linie(y) $\wedge$ Liegt-auf(x, y))' unterstellt.

Es scheint zumindest so, als ob es in vielen Fällen aus einer konsistenten Prämissenmenge non-redundant und unter "Verhackstückelung" ableitbare Konjuktionen gibt, für welche die Prämissenmenge kein deduktiver Grund ist – und dies nur, weil eines der Konjunkte aus einem Satz der Prämissenmenge folgt.

Andererseits ist es nicht so, dass sich unter dem Explikationsvorschlag von RK ergibt, dass für alle Prämissenmengen X und Konjunktionen $A \wedge B$ mit $\nvdash A$ und $\nvdash B$ gilt: Wenn es ein $C \in X$ gibt, so dass $C \vdash A$ oder $C \vdash B$, dann $X \not\rhd A \wedge B$. So ist beispielsweise die Prämissenmenge $\{p, p \rightarrow q, q \rightarrow s\}$ ein deduktiver Grund für $q \wedge (q \rightarrow s)$, ungeachtet dessen, dass in diesem Fall sogar ein Konjunkt des Satzes auch Element der Prämissenmenge ist. In diesem Fall ist aber $q \rightarrow s$ kein Teilinhalt von $q \wedge (q \rightarrow s)$, da nicht jedes Prämissenminimum für $q \rightarrow s$ aus einem Prämissenminimum für $q \wedge (q \rightarrow s)$ folgt: $\{\neg q\}$ ist Prämissenminum für $q \rightarrow s$ und $\neg q$ folgt nicht aus $\{q, s\}$, dem einzigen Prämissenminimum für $q \wedge (q \rightarrow s)$ (siehe zu einem Nachweis der hier vorgebrachten Behauptungen Teil 1 des Anhangs).

Das letzte Beispiel gibt Anlass zu Überlegungen in dreierlei Hinsicht: (i) Die von RK vermittelten Intuitionen bezüglich der Teilinhaltsrelation legen es nahe, dass bei logisch-indeterminierten Konjunktionen die jeweiligen (logisch indeterminierten) Konjunkte als Teilinhalte anzusehen sind: "Der Satz r […] ist etwas, das man in einem gewissen […] Sinn als 'Teilinhalt' von $q \wedge r$ auffassen kann" (S.26). Also sollte wohl auch $q \rightarrow s$ als Teilinhalt von $q \wedge (q \rightarrow s)$ gelten. Eben dies wird aber nicht geleistet: $q \rightarrow s$ ist kein Teilinhalt von $q \wedge (q \rightarrow s)$. Ist die Teilinhaltsdefinition daher – gerade hinsichtlich des von RK ins Spiel gebrachten Maßstabes – noch als adäquat anzusehen? – Dieses Ergebnis macht es fraglich, ob die angebotene Charakterisierung von 'Teilinhalt', wie Kreuzbauer und Dorn behaupten, ein "besonders gelungenes Stück logischer Explikationsarbeit"[5] darstellt.

(ii) Außerdem zeigt das Beispiel, dass es deduktive Begründungen mit »durchgereichten Prämissen« gibt – im Beispiel ist das rechte Konjunkt der Konklusion Element der Prämissenmenge. Entsprechend erscheint es fraglich, ob die Prämissen in diesem Fall nur durch "Verhackstückelung" zur Konklusion führen.

---

[5] KREUZBAUER/DORN: Einleitung, S.10.

Ist die angebotene Explikation von 'deduktiver Grund' mithin in dieser Hinsicht zu weit? Sind bestimmte Ableitungen gemäß der Explikation deduktive Begründungen, obwohl es sich – zumindest den von RK vorgebrachten Intuitionen nach – um "partielle Selbstbegründungen" (vgl. S.26) zu handeln scheint?

(iii) Angesichts dessen, dass der Nachweis der Erfülltheit der Teilinhaltsschaft anscheinend Fertigkeiten verlangt, die über jene hinausgehen, die zum deduktiven Ableiten verlangt werden (man begutachte dazu Teil I des Anhangs), stellt sich hier, wie schon bei der Forderung nach Non-Redundanz (vgl. §2), des Weiteren die Frage, ob nicht viele Sprachbenutzer gar nicht in der Lage wären, bewusst deduktive Begründungen im Sinne RKs zu führen – auch wenn sie sehr wohl in der Lage sein sollten, bewusst deduktive Ableitungen vorzulegen.

§7
Zu Fragen, die nicht auf einzelne Bedingungen beschränkt sind

Nachfolgend werden weitere Fragen zu einigen Konsequenzen der vorgenommenen Charakterisierung deduktiver Gründe aufgeworfen, die sich nicht an einzelnen Klauseln festmachen lassen, sondern sich aus deren Zusammenspiel ergeben. Diese Fragen betreffen die Ungleichbehandlung äquivalenter Aussagenmengen, den Ausschluss »natürlicher« Begründungen und die Nicht-Abgeschlossenheit der von RK entwickelten Begründungsrelation unter Einführung von Negator und unter Einführung und Beseitigung von Konjunktor, Adjunktor, Subjunktor und Universal- und Partikularquantor bei Einschränkung auf konsistente Mengen und Aussagen sowie schließlich die Nicht-Transitivität der Begründungsrelation. Dabei wird vorausgesetzt, dass die Klauseln der Deduktiver-Grund-Definition und auch die Prämissenminima- und Teilinhaltsdefinition in nahe liegender Weise für die Prädikatenlogik angepasst werden.

Zunächst zu Fragen, die sich zwanglos aus der Ungleichbehandlung äquivalenter Aussagenmengen ergeben. Dabei wird für die folgende Betrachtung die übliche Charakterisierung unterstellt, nach der zwei Aussagenmengen X und Y genau dann äquivalent sind, wenn für alle $A \in Y$: $X \vdash A$ und für alle $A \in X$: $Y \vdash A$ gilt. Unter dieser Charakterisierung gilt dann etwa, dass $\{(p \wedge q) \vee (\neg p \wedge \neg q), p\}$ ein deduktiver Grund für q, aber die äquivalente Aussagenmenge $\{(\neg p \vee q) \wedge (p \vee \neg q), p\}$ kein deduktiver Grund für q ist. Ebenso gilt, dass $\{p, q, p \wedge q \rightarrow s\}$ ein deduktiver Grund für s ist, während die äquivalente Aussagenmenge $\{p \wedge q, p \wedge q \rightarrow s\}$ kein deduktiver Grund für s ist (siehe zu diesem Beispiel auch §4). Sodann gilt, dass $\{p, p \vee q \rightarrow s \wedge q\}$ ein deduktiver Grund für $q \wedge s$ ist, während die äquivalenten Aussagemengen $\{p, q, p \vee q \rightarrow s\}$, $\{p, q, p \rightarrow s, q \rightarrow s\}$ und erst Recht $\{p, q, s\}$ und $\{p \wedge q \wedge s\}$ keine deduktiven Gründe für $q \wedge s$ sind.

Die soeben aufgezeigte Ungleichbehandlung motiviert RK durch verschiedene Überlegungen zur metatheoretischen Überschaubarkeit (S. 25), zur Non-Redundanz (S. 23-24) und zum Ausschluss (partieller) Selbstbegründungen (S. 26). Zum ersten Punkt stellt sich zum einen die Frage, inwieweit der metatheoretischen Überschaubarkeit im Begründungsgeschäft Vorrang vor der Handlichkeit im

Gebrauch einzuräumen ist. Zum anderen wäre zu fragen, inwieweit das Überschaubarkeitsziel mit den vorgenommen Festlegungen erreicht wird. So wäre etwa zur Wahrung der deduktiven Grundschaft die Menge $\{p,\ p \vee q \rightarrow s \wedge q\}$ der Menge $\{p,\ q,\ s\}$ als Kandidat für eine Begründung von $q \wedge s$ vorzuziehen, obgleich letztere für viele einen höheren Überschaubarkeitsgrad haben dürfte als die zuerst genannte Menge.

In Bezug auf den zweiten und den dritten Punkt stellt sich die Frage, ob die Rede von der Non-Redundanz von Aussagenmengen bezüglich der Ableitbarkeit von Aussagen und die Rede von der Selbstbegründung von Aussagen aus Aussagenmengen so reguliert werden sollen, dass diese Eigenschaften invariant bezüglich äquivalenter Aussagenmengen sind oder nicht. Die hier favorisierte Position geht zwar in die Richtung, dass die Selbstbegründung von Aussagen aus Aussagenmengen nicht invariant bezüglich äquivalenter Aussagenmengen sein sollte (vgl. §3), es wäre aber zu fragen, ob dies von RK auch so gesehen wird.

Für die Non-Redundanz von Aussagenmengen bezüglich der Ableitbarkeit von Aussagen scheint es jedoch zumindest überlegenswert, die Geltung folgenden Zusammenhangs zu fordern: Wenn X bezüglich der Ableitbarkeit von C aus X redundant ist, dann sind auch alle zu X äquivalenten Aussagenmengen Y bezüglich der Ableitbarkeit von C aus Y redundant. Es scheint derzeit so, als würden Aussagenmengen nur dann durch die Non-Redundanz-Forderung (B4) ausgeschlossen, wenn einzelne Elemente oder Konjunkte dieser Elemente für die Ableitung der zu begründenden Aussage überflüssig sind. Werden dagegen überflüssige Aussagen geschickt in anderen Elementen »verpackt«, so werden sie durch das Non-Redundanzkriterium nicht ausgeschlossen: $\{\neg p \vee q,\ p\}$ ist ein deduktiver Grund für q. $\{\neg p \vee q,\ p \vee \neg q,\ p\}$ ist wegen Redundanz kein deduktiver Grund für q. $\{(\neg p \vee q) \wedge (p \vee \neg q),\ p\}$ ist wegen Konjunktionscharakter (B6) kein deduktiver Grund für q – die Redundanz wurde nicht gut getarnt. Die Distributivität des Konjunktors über den Adjunktor führt zu $\{(p \wedge \neg p) \vee (p \wedge q) \vee (\neg p \wedge \neg q) \vee (q \wedge \neg q),\ p\}$, was nun ein deduktiver Grund für q ist – die Redundanz ist ausreichend verschleiert.

Eine weitere Frage, die sich angesichts der vorgeschlagenen Explikation stellt, ist die, ob nicht durch die Bedingungen »natürliche« Begründungen ausgeschlossen werden. So erscheint die Menge der Additionsaxiome {$\bigwedge x\ x$+0 = x, $\bigwedge x \bigwedge y$(x+nf(y) = nf(x+y))} als einigermaßen natürlicher Grund für 0+0 = 0. Tatsächlich ist aber keine Teilmenge von {$\bigwedge x\ x$+0 = x, $\bigwedge x \bigwedge y$(x+nf(y) = nf(x+y))} ein deduktiver Grund für 0+0 = 0. Es gilt nämlich: Ø ist leer (B3), {$\bigwedge x\ x$+0 = x} enthält nur eine Aussage und verstößt gegen die Teilinhaltsforderung (B7 und B8), {$\bigwedge x \bigwedge y$(x+nf(y) = nf(x+y))} $\nvdash$ 0+0 = 0 (B1) und {$\bigwedge x\ x$+0 = x, $\bigwedge x \bigwedge y$(x+nf(y) = nf(x+y))} verstößt gegen die Non-Redundanz-Forderung und gegen die Teilinhaltsforderung (B4 und B8).

Sodann lassen sich hinsichtlich der Nicht-Abgeschlossenheit und Nicht-Transitivität der Begründungsrelation einige Fragen aufwerfen. In Teil 2 des Anhangs werden Klauseln zu Abgeschlossenheit unter **E**inführung von **N**egator (kurz: NE) und unter **E**inführung und **B**eseitigung von **K**onjunktor, **A**djunktor, **S**ubjunktor und **U**niversal- und **P**artikularquantor (kurz: KE, KB, AE, AB usf.) bei Einschränkung auf konsistente Mengen und Aussagen sowie zur Transitivität aufgelistet, die für die von RK angebotene Begründungsrelation *nicht* gelten. Es erscheint nun zumindest in manchen Fällen nicht unmittelbar einsichtig, warum eine Begründungsrelation wünschenswert ist, für die die aufgeführten Abgeschlossenheitsklauseln und die Transitivität nicht gelten. Dies betrifft neben der Transitivität selbst (Klausel (xii)) vor allem KE, KB, SB, UB und PE (Klauseln (ii), (iii), (vii), (ix), (x)).

Am Beispiel von KE: Angenommen etwa, man hat ein konsistentes und auch sonst »intaktes« Axiomensystem $X = Z \cup Y$ und $Z \rhd A$ und $Y \rhd B$: Möchte man nicht ohne großes Federlesen sagen können, dass $X \rhd A \wedge B$? Eine ähnliche Frage stellt sich bei SB. Zu UB beispielsweise: Möchte man nicht einfach von $X \rhd \bigwedge xPx$ zu $X \rhd Pa$ übergehen können? Dazu analoge Fragen stellen sich bei KB und PE.

Bei anderen Klauseln sind die Intuitionen dagegen weniger klar. Bei NE beispielsweise ist ausgeschlossen, dass ein konsistentes Axiomensystem die Basis für die Begründung einer Negation im Sinne von Klausel (i) liefert. Bei AE ist es unter Umständen möglich, dass ein Axiomensystem X eine Aussage A begründet, man aber nicht will, dass $X \rhd A \vee B$, etwa weil B – und damit auch $A \vee B$ – als Scheinsatz angesehen wird und Scheinsätze weder begründbar noch widerlegbar sein sollen.

§8
Fragen zu Anlass, Vorgehen, Zweck

Vorstehend wurden bereits einige Fragen bezüglich der Adäquatheit der von RK angebotenen Explikation aufgeworfen: Gibt es nicht deduktive Ableitungen, die man gerne als deduktive Begründungen ansehen möchte, die es aber zufolge des Vorschlags nicht sind (Unvollständigkeit)? Weist die Beziehung des deduktiven Grundes Eigenschaften auf resp. nicht auf, die sie nicht aufweisen soll resp. aufweisen soll?

Unabhängig von den aufgeworfenen Problemen, die vor allem auch unsere vielleicht nicht allgemein geteilten Intuitionen und Maßstäbe zum deduktiven Begründen betreffen, stellt sich außerdem die Frage, ob nicht die von RK angebotene Explikation an drei Stellen mit seinen eigenen Intuitionen und Maßstäben in Konflikt gerät: Erstens vermuten wir dies für die Charakterisierung von Sätzen mit Konjunktionscharakter – obwohl RKs diesbezüglichen Adäquatheitsintuitionen uns nicht ganz klar sind (vgl. §4). Zweitens betrifft dies die Teilinhaltsdefinition (vgl. §6 und Teil 1 des Anhangs). Drittens betrifft es den Ausschluss partieller Selbstbegründungen, wie er mit B8 wohl erreicht werden soll (vgl. ebenfalls §6 und Teil1 des Anhangs).

In der Folge ist noch einigen Fragen Raum zu geben, die mit dem *explikativen Charakter* der vorgelegten Definition zusammenhängen. Explikationen sind Einführungen von Redeteilen, die bereits verwendet werden, meist an diskursiven Schlüsselstellen. Häufig liegen auch bereits Charakterisierungen vor; und zwischen den Proponenten dieser Bestimmungsvorschläge werden manchmal erbitterte Kontroversen ausgetragen. Der Anlass für Explikationen besteht darin, dass die vorliegende Verwendung relativ auf die verfolgten Rede- resp. Erkenntniszwecke Mängel aufweist, die durch die vorzunehmende Verwendungsregulierung behoben werden sollen – und die gegebenenfalls durch schon versuchte Explikationen nicht behoben worden sind.

Es ist also zunächst zu fragen, welches die Mängel in der (oder auch den) faktischen Verwendung(en) des Prädikats der deduktiven Begründung bzw. des deduktiven Grunds sind, die RK veranlassen, eine Explikation vorzuschlagen. Und weiter und eine Ebene höher: Welches sind die Defekte der bisherigen Explikationen bzw. der sich in ihnen aussprechenden Verständnisse? Eine Standardauffassung von deduktiver Begründung fasst diese als deduktive Ableitung von (damit ebenfalls) wahren Aussagen aus einer Menge wahrer Aussagen. Aus welchem Grund nimmt RK zu dieser Auffassung keine Stellung? Geht es etwa auch darum, eine Charakterisierung zu liefern, die ohne das Wahrheitsprädikat auskommt? Wenn ja, warum ist das Wahrheitsprädikat unbedingt zu meiden? Dass es auch um den Ausschluss von Selbstbegründungen geht, wird zwar deutlich; aber mit diesen kann man erkenntnisphilosophisch auch anders umgehen.

Was den Weg der Findung der Bedingungen angeht, könnte es hilfreich sein, wenn RK von vornherein den Explikationsmaßstab offen legte: Welches sollen die Aussagen sein, in denen die explizierten Begriffe wesentlich vorkommen, die auf Basis der Explikation beweisbar werden sollen? Das würde auch eine Basis schaffen, um die angebotene Bestimmung mit anderen vergleichen zu können.

Schließlich wäre es hilfreich, den leitenden Zweck des gesamten Unternehmens zu verdeutlichen und das Unterfangen von verwandten Vorhaben abzugrenzen: Verfolgt RK ein *reformatorisches Projekt?* Soll es also darum gehen, die Begründungspraxis zu revidieren in dem Sinne, dass keine Scheinbegründungen, sondern nur noch echte Begründungen im Sinne der vorgelegten Charakterisierung vorgenommen werden? Dann benötigte man die explizierten Ausdrücke, um entsprechende Maximen zu formulieren. – Oder handelt es sich um ein eher *kontemplationistisches Vorhaben:* Soll es also darum gehen, die Begründungspraxis im *status quo* zu belassen, aber die wirklichen von den nur scheinbaren Begründungen zu unterscheiden? Was wären die Folgen einer solchen Unterscheidung? Könnte man die Ergebnisse von echten Begründungen in weiteren Erkenntnisvorhaben oder auch im sonstigen Handeln in anderer Weise nutzen als die Resultate von Scheinbegründungen? Käme ihnen eine höhere »kognitive Dignität« zu?

RK ist ohne Zweifel ein Routinier in den frustrierenden explikativen Geschäften der Philosophie. Dazu, und das darf abschließend nicht unerwähnt bleiben, passt es, dass er an wenigstens zwei Stellen (S.21, 29) seinen Versuch in skeptischer Manier im Rückgriff auf das Vokabular der Hoffnung anspricht. Unsere Hoffnung ist, dass diese Arbeit Anlass zu weiteren explikativen Bemühungen sein könnte!

Anhang

Im Folgenden findet sich zum einen ein Nachweis (Teil 1) dafür, dass sich unter der Prämissenminima- und der Teilinhaltsdefinition ergibt:

(i) Es gibt logisch indeterminierte Aussagen A, B, so dass $\not\models \neg(A \wedge B)$ und B ist kein Teilinhalt von $A \wedge B$. Genauer wird gezeigt, dass $q \rightarrow s$ kein Teilinhalt von $q \wedge (q \rightarrow s)$ ist (Satz 10). Dies scheint im Konflikt zu den von RK vermittelten Intuitionen zu stehen: "Der Satz r […] ist etwas, das man in einem gewissen […] Sinne als 'Teilinhalt' von $q \wedge r$ auffassen kann" (S. 26).

(ii) Es gibt in deduktiven Begründungen »durchgereichte Prämissen«; genauer: es gibt Aussagen A und B und Aussagenmengen T, so dass $B \in T$ und $T \rhd A \wedge B$. Genauer wird gezeigt, dass $\{p, p \rightarrow q, q \rightarrow s\} \rhd q \wedge (q \rightarrow s)$ (Satz 12). Dies steht im Konflikt zu den von RK zur Motivation von B8 ins Spiel gebrachten Intuitionen, nach denen es sich in solchen Fällen "sicher nicht um eine einwandfreie deduktive Begründung", sondern um eine "'partielle Selbstbegründung'" (S. 26) handeln soll, da ja das entsprechende Konjunkt "auch als Prämisse auftritt, also nicht in 'ordentlicher' Weise durch 'Verhackstückelung' mehrerer Prämissen zustande kommt" (ebd.).

(i) ist eine mutmaßliche Inadäquatheit der Teilinhaltsdefinition bezüglich des von RK angelegten Maßstabes. (ii) ist anscheinend eine Inadäquatheit der Deduktiver-Grund-Definition bezüglich des von RK angelegten Maßstabes.

Zum anderen wird im Folgenden vorgeführt (Teil 2), dass die Begründungsrelation unter Einführung von Negator und unter Einführung und Beseitigung von Konjunktor, Adjunktor, Subjunktor und Universal- und Partikularquantor bei Einschränkung auf konsistente Mengen nicht abgeschlossen ist und dass die Begründungsrelation nicht transitiv ist.

Teil 1

Um den gewünschten Nachweis zu erbringen, dass (i) $q \rightarrow s$ kein Teilinhalt von $q \wedge (q \rightarrow s)$ ist und (ii) $\{p, p \rightarrow q, q \rightarrow s\} \rhd q \wedge (q \rightarrow s)$, sind vorbereitend einige Sätze zu (aussagenlogischen) Hintikkamengen (im Folgenden: HM) und (aussagenlogischen) Prämissenminima (im Folgenden: PM) zu etablieren.

Satz 1. Wenn X eine HM ist, dann gilt für alle Belegungen f:

$$f \vDash X \text{ gdw für alle Literale } A \in X \text{ ist } \mathrm{g}_f(A) = 1.$$ [6]

Beweis: Sei X eine HM und sei f eine Belegung. Zu zeigen ist nun:

$f \vDash X$ gdw für alle Literale $A \in X$ ist $\mathrm{g}_f(A) = 1$.

(*LR*): ergibt sich direkt aus der Definition der Erfüllungsrelation.

(*RL*): Gelte für alle Literale $A \in X$: $\mathrm{g}_f(A) = 1$. Zu zeigen ist nun, dass $f \vDash X$. Dazu wird durch Induktion über den Formelgrad gezeigt: Wenn $C \in X$, dann $\mathrm{g}_f(C) = 1$ und wenn $\neg C \in X$, dann $\mathrm{g}_f(C) = 0$. Daraus ergibt sich dann sofort, dass $f \vDash X$.

Gelte die Behauptung für alle $k <$ grad(C).

Sei grad(C) = 0. Dann ist C atomar und die Behauptung ergibt sich aus der Annahme, dass $\mathrm{g}_f(A) = 1$ für alle Literale $A \in X$.

Sei nun grad(C) > 0. Dann ist C eine molekulare Formel.

Gezeigt wird nun zunächst: Wenn $C \in X$, dann $\mathrm{g}_f(C) = 1$. Sei dazu $C \in X$.

Angenommen $C = \neg A$. Dann ist grad(A) < grad(C) und somit nach I.V. $\mathrm{g}_f(A) = 0$ und damit $\mathrm{g}_f(C) = 1$.

Angenommen $C = A \wedge B$. Dann sind $A, B \in X$ und grad(A), grad(B) < grad(C) und somit nach I.V. $\mathrm{g}_f(A) = 1$ und $\mathrm{g}_f(B) = 1$ und somit $\mathrm{g}_f(C) = 1$.

Angenommen $C = A \vee B$. Dann ist $A \in X$ oder $B \in X$ und grad(A), grad(B) < grad(C) und somit nach I.V. $\mathrm{g}_f(A) = 1$ oder $\mathrm{g}_f(B) = 1$ und somit $\mathrm{g}_f(C) = 1$.

Angenommen $C = A \rightarrow B$. Dann ist $\neg A \in X$ oder $B \in X$ und grad(A), grad(B) < grad(C) und somit nach I.V. $\mathrm{g}_f(A) = 0$ oder $\mathrm{g}_f(B) = 1$ und somit $\mathrm{g}_f(C) = 1$.

Nun ist zu zeigen: Wenn $\neg C \in X$, dann $\mathrm{g}_f(C) = 0$. Sei dazu $\neg C \in X$.

Angenommen $C = \neg A$. Dann ist $A \in X$ und grad(A) < grad(C) und somit nach I.V. $\mathrm{g}_f(A) = 1$ und damit $\mathrm{g}_f(C) = 0$.

---

[6] Beweise dieses und des folgenden Satzes (oder ähnlicher Sätze) sind im Kontext des Nachweises dafür, dass jede Hintikkamenge ein Modell hat, üblich. Wenn f eine aussagenlogische Belegung ist, dann sei g_f die durch f induzierte aussagenlogische Bewertung.

Angenommen $C = A \wedge B$. Dann ist $\neg A \in X$ oder $\neg B \in X$ und grad(A), grad(B) < grad(C) und somit nach I.V. $g_f(A) = 0$ oder $g_f(B) = 0$ und damit $g_f(C) = 0$.

Angenommen $C = A \vee B$. Dann ist $\neg A \in X$ und $\neg B \in X$ und grad(A), grad(B) < grad(C) und somit nach I.V. $g_f(A) = 0$ und $g_f(B) = 0$ und damit $g_f(C) = 0$.

Angenommen $C = A \rightarrow B$. Dann ist $A \in X$ und $\neg B \in X$ und grad(A), grad(B) < grad(C) und somit nach I.V. $g_f(A) = 1$ und $g_f(B) = 0$ und damit $g_f(C) = 0$.

Satz 2. Wenn X eine HM ist, dann gilt für alle Belegungen f: Wenn für alle atomaren Formeln A: $f(A) = 1$ gdw $A \in X$, dann $f \vDash X$.

Beweis: Sei X eine HM und f eine Belegung und gelte für alle atomaren Formeln A: $f(A) = 1$ gdw $A \in X$. Sei D ein Literal und $D \in X$. Ist D atomar, dann ist nach Annahme $f(D) = 1$. Ist $D = \neg A$, dann ist $A \notin X$ und somit nach Annahme $f(A) = 0$ und damit $g_f(D) = 1$. Also gilt $g_f(D) = 1$ für alle Literale $D \in X$ und die Behauptung ergibt sich mit Satz 1.

Satz 3. Wenn X eine HM ist und $X \vDash C$, dann $\{D \mid D = B$ oder $D = \neg B$ für eine atomare Teilformel B von $C\} \cap X \vDash C$.

Beweis: Sei X eine HM und gelte $X \vDash C$. Sei f eine Belegung mit $f \vDash \{D \mid D = B$ oder $D = \neg B$ für eine atomare Teilformel B von $C\} \cap X$. Zu zeigen ist nun, dass $f \vDash C$. Dazu wird unter Rückgriff auf Satz 1 gezeigt, dass es eine Belegung f^* gibt, die für alle atomaren Teilformeln B von C mit f übereinstimmt und die X und damit dann nach Voraussetzung auch C erfüllt. Daraus ergibt sich dann die gewünschte Aussage für f mit dem Koinzidenzlemma.

Sei $f^* = (f\restriction\{B \mid B$ ist eine atomare Teilformel von $C\}) \cup \{(A, 1) \mid A \in X\backslash\{B \mid B$ ist eine atomare Teilformel von $C\}$ und A ist atomar$\} \cup \{(A, 0) \mid A \notin X \cup \{B \mid B$ ist eine atomare Teilformel von $C\}$ und A ist atomar$\}$.

Sei nun D ein Literal und $D \in X$. Sei D atomar. Ist D Teilformel von C, dann ist $f^*(D) = f(D) = 1$. Ist D keine Teilformel von C, dann ist ebenfalls $f^*(D) = 1$. Sei $D = \neg A$. Dann ist nach der HM-Definition $A \notin X$. Sodann gilt: Ist A Teilformel von C, dann ist $g_f(D) = 1$ und damit $g_{f^*}(D) = 1$. Ist A keine Teilformel von C, dann ist wegen $A \notin X$ $f^*(A) = 0$ und damit ebenfalls $g_{f^*}(D) = 1$. Also gilt $g_{f^*}(D) = 1$ für alle Literale $D \in X$

Dann gilt mit Satz 1: $f^* \vDash X$ und damit nach der Eingangsannahme $f^* \vDash C$ und damit wegen $f\restriction\{B \mid B$ ist eine atomare Teilformel von $C\} = f^*\restriction\{B \mid B$ ist eine atomare Teilformel von $C\}$ mit dem Koinzidenzlemma $f \vDash C$.

Satz 4. Wenn X eine HM ist und $Y \subseteq \{D \mid D$ ist Literal$\} \cap X$, dann ist Y eine HM.

Beweis: Sei X eine HM und $Y \subseteq \{D \mid D$ ist Literal$\} \cap X$. Sei A atomar und $A \in Y$. Dann gilt nach Voraussetzung $A \in X$ und damit $\neg A \notin X$ und somit auch $\neg A \notin Y$. Die restlichen Klauseln der HM-Definition ergeben sich aus $Y \subseteq \{D \mid D$ ist Literal$\}$ und Theoremen über eindeutige Lesbarkeit.

Satz 5. Wenn X ein PM für C ist, dann ist $X \subseteq \{D \mid D = B$ oder $D = \neg B$ für eine atomare Teilformel B von $C\}$.

Beweis:[7] Sei X ein PM für C. Nach der PM-Definition ist dann X eine HM, $X \vDash C$ und es gibt keine HM Y, so dass $Y \subset X$ und $Y \vDash C$. Nun ist $\{D \mid D = B$ oder $D = \neg B$ für eine atomare Teilformel B von $C\} \cap X \subseteq X$, nach Satz 4 ist $\{D \mid D = B$ oder $D = \neg B$ für eine atomare Teilformel B von $C\} \cap X$ eine HM und nach Satz 3 gilt $\{D \mid D = B$ oder $D = \neg B$ für eine atomare Teilformel B von $C\} \cap X \vDash C$. Wäre nun $X \backslash \{D \mid D = B$ oder $D = \neg B$ für eine atomare Teilformel B von $C\} \neq \emptyset$, dann wäre X also entgegen der Annahme kein PM für C.

Satz 6. $f \vDash C$ gdw es gibt ein X, so dass X ein PM für C ist und $f \vDash X$.

Beweis:

(*LR*): Gelte $f \vDash C$. Sei $Y = \{D \mid D = B$ oder $D = \neg B$ für eine atomare Teilformel B von C und $f \vDash D\}$.

Gezeigt wird nun zunächst, dass $Y \vDash C$ und sodann, dass alle Teilmengen von Y HM sind. Darauf aufbauend wird zuletzt gezeigt, dass wenigstens eine Teilmenge von Y ein PM für C ist – welches dann entsprechend auch von f erfüllt wird.

Sei nun zum Nachweis von $Y \vDash C$ f^* eine beliebige Belegung mit $f^* \vDash Y$. Dann gilt: $f^* \restriction \{B \mid B$ ist eine atomare Teilformel von $C\} = f \restriction \{B \mid B$ ist eine atomare Teilformel von $C\}$ und damit wegen $f \vDash C$ nach dem Koinzidenzlemma: $f^* \vDash C$.

Zum Nachweis von $f^* \restriction \{B \mid B$ ist eine atomare Teilformel von $C\} = f \restriction \{B \mid B$ ist eine atomare Teilformel von $C\}$ reicht es, zu zeigen, dass für alle atomaren Teilformeln B von C gilt: $f^*(B) = 1$ gdw $f(B) = 1$. Sei dazu B eine atomare Teilformel von C. Sei nun $f^*(B) = 1$. Wäre nun $f(B) = 0$. Dann gilt: $f \vDash \neg B$ und damit $\neg B \in Y$ und damit $f^* \vDash \neg B$ und somit $f^*(B) = 0$. Widerspruch. Also gilt $f(B) = 1$. Sei nun umgekehrt $f(B) = 1$. Dann ist $B \in Y$. Dann ist aber auch $f^*(B) = 1$.

[7] Die Grundideen der Beweise von Satz 5 und 6 finden sich in QUINEs Beweisen zu Satz (II) bzw. (III) in dessen Aufsatz "On Cores and Prime Implicants of Truth Functions". Tatsächlich lässt sich im Ausgang von Satz 5 leicht zeigen, dass für logisch indeterminiertes C gilt: X ist genau dann ein PM für C, wenn die Konjunktion der Elemente von X ein Primimplikant von C ist.

Nachdem nun $Y \vDash C$ gezeigt wurde, wird nun gezeigt: Wenn $X \subseteq Y$, dann ist X eine HM. Sei dazu $X \subseteq Y$. Nun gilt nach Voraussetzung $f \vDash Y$ und damit auch $f \vDash X$. Damit ergibt sich dann: Wenn atomares $B \in X$, dann $\neg B \notin X$. Da Y nur Literale enthält, enthält sodann auch X nur Literale, womit sich die restlichen Klauseln der HM-Definition durch eindeutige Lesbarkeit ergeben.

Nun wird abschließend gezeigt, dass es ein $X \subseteq Y$ gibt, so dass X ein PM für C ist. Damit folgt dann sofort die Behauptung, da für ein solches X wegen $f \vDash Y$ auch $f \vDash X$ gilt. Nun gibt es mit Y selbst eine endliche Menge X, so dass $X \subseteq Y$ und $X \vDash C$ (Y ist endlich, da C nur endlich viele atomare Teilformeln hat – genauer lässt sich die Endlichkeit von Y analog zu Satz 7 zeigen). Also gibt es eine kleinste natürliche Zahl k, so dass es ein $X \subseteq Y$ mit $|X| = k$ und $X \vDash C$ gibt. Seien k und X so. Dann gilt: $X \subseteq Y$ und damit ist X eine HM und es gilt $X \vDash C$. Sodann gibt es wegen der Minimalität von $k = |X|$ kein $Z \subset X$, so dass $Z \vDash C$ und somit auch keine derartige HM. Also ist X ein PM für C.

(*RL*):Gebe es nun ein X, so dass X ein PM für C ist und $f \vDash X$. Dann ergibt sich aus der PM-Definition, dass $X \vDash C$ und damit gilt dann $f \vDash C$.

Satz 7. Wenn X ein PM für C ist, dann ist $|X| \leq |\{B \mid B$ ist eine atomare Teilformel von $C\}|$.

Beweis: Sei X ein PM für C. Dann ist nach Satz 5 $X \subseteq \{D \mid D = B$ oder $D = \neg B$ für eine atomare Teilformel B von $C\}$. Da X somit nur Literale enthält, ist $F = \{(D, B) \mid D \in X$, B atomare Formel und $D = B$ oder $D = \neg B\}$ eine Funktion auf X und wegen $X \subseteq \{D \mid D = B$ oder $D = \neg B$ für eine atomare Teilformel B von $C\}$ ist Ran(F) $\subseteq \{B \mid B$ ist eine atomare Teilformel von $C\}$. Seien nun D, $D^* \in X$ und (D, B), $(D^*, B) \in F$. Dann ist $D = B$ oder $D = \neg B$ und $D^* = B$ oder $D^* = \neg B$. Da X eine HM ist, ist dann entweder nur $B \in X$ oder nur $\neg B \in X$. Daher ist dann $D = B$ und $D^* = B$ oder $D = \neg B$ und $D^* = \neg B$. In beiden Fällen ist $D = D^*$. Also ist F eine Injektion von X in $\{B \mid B$ ist eine atomare Teilformel von $C\}$. Daraus folgt die Behauptung.

Satz 8. Wenn X ein PM für C ist und Y ein PM für C^* ist und $X \vDash Y$, dann $Y \subseteq X$.

Beweis: Sei X ein PM für C und Y ein PM für C^* und $X \vDash Y$. Dann sind X und Y HM und es gilt für alle $D \in Y$: $X \vDash D$ und es gilt mit Satz 5 für alle $D \in Y$: D ist ein Literal.

Für den Nachweis von $Y \subseteq X$ wird im weiteren Beweis die Annahme, dass $D \in Y$ und $D \notin X$ zum Widerspruch geführt. Da X eine HM ist, ist X erfüllbar. Sei nun f eine Belegung, so dass für alle atomaren B gilt: $f(B) = 1$ gdw $B \in X$. Dann ist nach Satz 2 $f \vDash X$.

Wäre nun $D \in Y$ und $D \notin X$. Dann ist D atomar oder es gibt ein A, so dass $D = \neg A$.

Angenommen, D ist atomar. Dann gilt nach Eingangsannahme wegen $D \in Y$ und $f \vDash X$ auch $f \vDash D$, während gleichzeitig wegen $D \notin X$ gilt $f \nvDash D$. Widerspruch!

Sei nun $D = \neg A$ für atomares A. Da nach Voraussetzung wegen $D \in Y$ gilt $X \vDash D$ und X eine HM und somit erfüllbar ist, ist dann $A \notin X$. Sei nun $f^* = (f{\upharpoonright}X) \cup \{(A, 1)\} \cup \{(B, 0) \mid B \notin X \cup \{A\}$ und B ist atomar$\}$.

Dann gilt $f^* \vDash X$. Sei dazu $B \in X$. Sei B atomar. Dann ist $f^*(B) = f(B) = 1$. Sei nun $B = \neg D^\#$. Dann ist $D^\# \notin X$ und wegen $D = \neg A \notin X$ ist $D^\# \neq A$ und damit $f^*(D^\#) = 0$ und somit $f^*(B) =1$. Damit gilt für alle Literale $B \in X$: $f^* \vDash B$ und somit nach Satz 1 auch $f^* \vDash X$.

Mit $f^* \vDash X$ gilt aber wegen $X \vDash D$ auch $f^* \vDash D$ und somit $f^* \nvDash A$, während andererseits nach Definition von f^* gilt: $f^* \vDash A$. Widerspruch! Also ergibt sich in beiden Fällen aus der Annahme $D \in Y$ und $D \notin X$ ein Widerspruch. Also gilt: Wenn $D \in Y$, dann $D \in X$.

Satz 9. Das einzige PM für $q \wedge (q \rightarrow s)$ ist $\{q, s\}$.

Beweis: Es reicht, zu zeigen, dass $\{q, s\}$ das einzige PM für $q \wedge s$ ist, da $q \wedge (q \rightarrow s)$ äquivalent zu $q \wedge s$ ist und da sich aus der PM-Definition ergibt, dass äquivalente Formeln dieselben PM haben.

Zunächst ist $\{q, s\}$ ein PM für $q \wedge s$. Sei nun X ein PM für $q \wedge s$. Dann ist X eine HM und $X \vDash q \wedge s$. Mit Satz 5 gilt sodann: $X \subseteq \{q, s, \neg q, \neg s\}$ und mit Satz 7 gilt: $|X| \leq 2$. Sodann gilt, dass $q \wedge s$ weder aus $\emptyset$ noch aus einer einelementigen Teilmenge von $\{q, s, \neg q, \neg s\}$ folgt. Von den sechs zu betrachtenden zweielementigen Teilmengen sind aber $\{q, \neg q\}$ und $\{s, \neg s\}$ keine HM und $\{q, \neg s\} \nvDash q \wedge s$, $\{s, \neg q\} \nvDash q \wedge s$, $\{\neg q, \neg s\} \nvDash q \wedge s$. Also bleibt nur: $X = \{q, s\}$.

Korollar (Satz 10). $q \rightarrow s$ ist kein Teilinhalt von $q \wedge (q \rightarrow s)$.

Beweis: $\{\neg q\}$ ist ein PM für $q \rightarrow s$, nach Satz 9 ist $\{q, s\}$ das einzige PM für $q \wedge (q \rightarrow s)$ und $\{q, s\} \nvDash \neg q$.

Satz 11. $\{A \mid A$ ist Teilinhalt von $q \wedge (q \rightarrow s)\} = \{A \mid A \dashv\vDash q \wedge s\} \cup \{A \mid A \dashv\vDash q \vee s\} \cup \{A \mid A \dashv\vDash q\} \cup \{A \mid A \dashv\vDash s\}$.

Beweis: Zunächst wird gezeigt: $\{A \mid A \dashv\vDash q \wedge s\} \cup \{A \mid A \dashv\vDash q \vee s\} \cup \{A \mid A \dashv\vDash q\} \cup \{A \mid A \dashv\vDash s\} \subseteq \{A \mid A$ ist Teilinhalt von $q \wedge (q \rightarrow s)\}$. Sei dazu $B \in \{A \mid A \dashv\vDash q \wedge s\} \cup \{A \mid A \dashv\vDash q \vee s\} \cup \{A \mid A \dashv\vDash q\} \cup \{A \mid A \dashv\vDash s\}$.

Dann ist $B \dashv\vDash q \wedge s$ oder $B \dashv\vDash q \vee s$ oder $B \dashv\vDash s$ oder $B \dashv\vDash q$. Offenbar gelten $q \wedge (q \rightarrow s) \vDash q \wedge s$ und $q \wedge (q \rightarrow s) \vDash q \vee s$ und $q \wedge (q \rightarrow s) \vDash s$ und $q \wedge (q \rightarrow s) \vDash q$ und damit in jedem Fall $q \wedge (q \rightarrow s) \vDash B$. (Kriterium (a) für den Teilinhalt.) Wäre $\vDash B$, so wäre $\vDash q \wedge s$ oder $\vDash q \vee s$ oder $\vDash s$ oder $\vDash q$, was nicht der Fall ist. Also $\nvDash B$. (Kriterium (b) für den Teilinhalt.) Aus der PM-Definition ergibt sich, dass äquivalente Formeln dieselben PM haben. Damit gilt: wenn es ein PM für $q \wedge s$ und ein PM für $q \vee s$ und ein PM für q und ein PM für s gibt, dann gibt es ein PM für B. Dies ist gegeben; die PM sind im einzelnen: $\{q, s\}$ für $q \wedge s$, $\{q\}$ und $\{s\}$ für $q \vee s$, $\{q\}$ für q und $\{s\}$ für s. Dabei ist $\{q, s\}$

dann auch ein PM für $q \wedge (q \to s)$. (Kriterium (c) für den Teilinhalt.) Offenbar folgen alle diese PM aus $\{q, s\}$, dem einzigen PM für $q \wedge (q \to s)$. (Kriterium (d) für den Teilinhalt.)

Nun ist noch zu zeigen, dass $\{A \mid A$ ist Teilinhalt von $q \wedge (q \to s)\} \subseteq \{A \mid A \dashv\vDash q \wedge s\} \cup \{A \mid A \dashv\vDash q \vee s\} \cup \{A \mid A \dashv\vDash q\} \cup \{A \mid A \dashv\vDash s\}$. Sei dazu $B \in \{A \mid A$ ist Teilinhalt von $q \wedge (q \to s)\}$. Zu zeigen ist nun: $B \dashv\vDash q \wedge s$ oder $B \dashv\vDash q \vee s$ oder $B \dashv\vDash s$ oder $B \dashv\vDash q$.

Aus der Annahme und der Teilinhaltsdefinition ergibt sich zunächst:

(a) $q \wedge (q \to s) \vDash B$,

(b) $\nvDash B$,

(c) es gibt ein PM für $q \wedge (q \to s)$ und es gibt ein PM für B,

(d) jedes PM für B folgt aus einem PM für $q \wedge (q \to s)$.

Um nun zu zeigen, dass $B \dashv\vDash q \wedge s$ oder $B \dashv\vDash q \vee s$ oder $B \dashv\vDash s$ oder $B \dashv\vDash q$, wird gezeigt: (i) Wenn X ein PM für B ist, dann $X = \{q, s\}$ oder $X = \{q\}$ oder $X = \{s\}$. (ii) (iia) Wenn $\{q, s\}$ PM für B ist, dann ist $B \dashv\vDash q \wedge s$; (iib) wenn $\{q\}$ ein PM für B ist, dann ist $B \dashv\vDash q \vee s$ oder $B \dashv\vDash q$; (iic) wenn $\{s\}$ ein PM für B ist, dann $B \dashv\vDash q \vee s$ oder $B \dashv\vDash s$. Aus (i) und (ii) folgt dann mit c) die geforderte Aussage.

Zu (i): Nach Satz 9 ist $\{q, s\}$ das einzige PM für $q \wedge (q \to s)$. Sodann gilt mit Satz 8: Wenn X ein PM für B ist und $\{q, s\} \vDash X$, dann $X \subseteq \{q, s\}$. Damit gilt wegen d): Wenn X ein PM für B ist, dann ist $X \in \{\emptyset, \{q\}, \{s\}, \{q, s\}\}$. Da ferner wegen b) gilt $\nvDash B$ ist $\emptyset$ kein PM für B und somit gilt: Wenn X ein PM für B ist, dann $X = \{q\}$ oder $X = \{s\}$ oder $X = \{q, s\}$.

Zu (iia): Sei $\{q, s\}$ ein PM für B. Dann gilt: $q \wedge s \vDash B$. Zu zeigen ist nun, dass $B \vDash q \wedge s$, womit dann insgesamt gilt: $B \dashv\vDash q \wedge s$.

Sei dazu f eine beliebige Belegung mit $f \vDash B$. Dann gilt mit Satz 6: Es gibt ein X, so dass X ein PM für B ist und $f \vDash X$. Sei nun X so. Nun ergibt sich aus der PM-Definition und daraus, dass $\{q, s\}$ ein PM für B ist, dass $\{q\}$ kein PM für B und $\{s\}$ kein PM für B ist. Damit ist mit (i) $\{q, s\}$ das einzige PM für B. Dann ist $X = \{q, s\}$ und damit $f \vDash \{q, s\}$ und somit $f \vDash q \wedge s$. Also gilt: Wenn $f \vDash B$, dann $f \vDash q \wedge s$ und somit gilt: $B \vDash q \wedge s$ und damit insgesamt $B \dashv\vDash q \wedge s$.

Zu (iib): Sei $\{q\}$ ein PM für B. Dann ist $\{q, s\}$ kein PM für B. Sodann ist $\{s\}$ ein PM für B oder nicht.

Im ersten Fall gilt dann zunächst: $q \vee s \vDash B$. Sodann sind dann mit (i) $\{q\}$ und $\{s\}$ die einzigen PM für B und damit ergibt sich wiederum mit Satz 6: Wenn $f \vDash B$, dann $f \vDash q$ oder $f \vDash s$ und damit $f \vDash q \vee s$. Damit gilt dann $B \vDash q \vee s$ und damit insgesamt $B \dashv\vDash q \vee s$.

Angenommen, $\{s\}$ ist kein PM für B. Dann gilt zunächst $q \vDash B$ und da mit (i) $\{q\}$ in diesem Fall das einzige PM für B ist, ergibt sich mit Satz 6 $B \vDash q$ und damit $B \dashv\vDash q$

Zu (iic): Für den Fall, dass $\{s\}$ PM für B ist, ergeben dann analoge Betrachtungen, dass $B \dashv\vDash q \vee s$ oder dass $B \dashv\vDash s$.

Korollar (Satz 12). $\{p,\ p \rightarrow q,\ q \rightarrow s\} \rhd q \wedge (q \rightarrow s)$.

Beweis: Es gilt:

(a) $\{p,\ p \rightarrow q,\ q \rightarrow s\} \vdash q \wedge (q \rightarrow s)$,

(b) $\{p,\ p \rightarrow q,\ q \rightarrow s\}$ ist konsistent,

(c) $\{p,\ p \rightarrow q,\ q \rightarrow s\}$ ist eine endliche, nicht-leere Satzmenge,

(d) $q \wedge (q \rightarrow s)$ ist aus keiner echten Teilmenge von $\{p,\ p \rightarrow q,\ q \rightarrow s\}$ ableitbar,

(e) kein Satz aus $\{p,\ p \rightarrow q,\ q \rightarrow s\}$ und auch keine Konjunktion von Sätzen aus $\{p,\ p \rightarrow q,\ q \rightarrow s\}$ ist logisch äquivalent mit $q \wedge (q \rightarrow s)$,

(f) kein Satz aus $\{p,\ p \rightarrow q,\ q \rightarrow s\}$ hat Konjunktionscharakter,

(g) $\{p,\ p \rightarrow q,\ q \rightarrow s\}$ enthält mindestens zwei Sätze,

(h) kein Teilinhalt von $q \wedge (q \rightarrow s)$ ist aus einem Satz aus $\{p,\ p \rightarrow q,\ q \rightarrow s\}$ ableitbar.

Dabei ergibt sich (h) leicht mit Satz 11.

Teil 2

Im Folgenden werden Klauseln zu Abgeschlossenheit unter Einführung von Negator und unter Einführung und Beseitigung von Konjunktor, Adjunktor, Subjunktor und Universal- und Partikularquantor bei Einschränkung auf konsistente Mengen und Aussagen sowie zur Transitivität aufgelistet, die für die Begründungsrelation *nicht* gelten, wobei wir für die Quantorklauseln eine Ausweitung der Begrifflichkeiten auf die Prädikatenlogik voraussetzen Den Klauseln folgt jeweils – ohne weiteren Beweis – ein Gegenbeispiel; *eine* verletzte Bedingung ist jeweils angegeben. Einige Fragen, die sich für uns hinsichtlich der Nicht-Abgeschlossenheit stellen, finden sich in §7.

Folgende Zusammenhänge gelten *nicht* allgemein:

(i) Wenn $X \rhd A$ und $Y \rhd \neg A$ und $(X \cup Y)\backslash\{D\}$ konsistent, dann $(X \cup Y)\backslash\{D\} \rhd \neg D$.

Gegenbeispiel: $\{p, r, p \wedge r \rightarrow q\} \rhd q$, $\{s, s \rightarrow \neg q \wedge \neg r\} \rhd \neg q$ und $\{p, p \wedge r \rightarrow q, s, s \rightarrow \neg q \wedge \neg r\}$ ist konsistent, aber $\{p, p \wedge r \rightarrow q, s, s \rightarrow \neg q \wedge \neg r\} \not\rhd \neg r$. (Non-Redundanz)

(ii) Wenn $X \rhd A$ und $Y \rhd B$ und $X \cup Y$ konsistent, dann $X \cup Y \rhd A \wedge B$.

Gegenbeispiel: $\{p, p \rightarrow q \wedge s\} \rhd q$ und $\{q, q \rightarrow s\} \rhd s$ und $\{p, p \rightarrow q \wedge s, q, q \rightarrow s\}$ ist konsistent, aber $\{p, p \rightarrow q \wedge s, q, q \rightarrow s\} \not\rhd q \wedge s$. (Non-Redundanz)

(iii) Wenn $X \rhd A \wedge B$, dann $X \rhd A$ und $X \rhd B$. (Vgl. Theorem (2), Seite 29)

Gegenbeispiel: $\{p, p \rightarrow q, q \rightarrow s\} \rhd q \wedge (q \rightarrow s)$, aber $\{p, p \rightarrow q, q \rightarrow s\} \not\rhd q$ und$\{p, p \rightarrow q, q \rightarrow s\} \not\rhd q \rightarrow s$. (Non-Redundanz, vgl. zu $\{p, p \rightarrow q, q \rightarrow s\} \rhd q \wedge (q \rightarrow s)$ Teil 1 des Anhangs)

(iv) Wenn $X \rhd A$, dann $X \rhd A \vee B$ und $X \rhd B \vee A$. (Vgl. Theorem (3), Seite 29)

Gegenbeispiel: $\{p \vee q, p \vee q \rightarrow q\} \rhd q$, aber $\{p \vee q, p \vee q \rightarrow q\} \not\rhd q \vee p$. (Non-Redundanz)

(v) Wenn $X \rhd A \vee B$ und $Y \rhd C$ und $Z \rhd C$ und $X \cup Y\backslash\{A\} \cup Z\backslash\{B\}$ ist konsistent, dann $X \cup Y\backslash\{A\} \cup Z\backslash\{B\} \rhd C$.

Gegenbeispiel: $\{p, p \rightarrow r \vee s\} \rhd r \vee s$ und $\{r, r \rightarrow t\} \rhd t$ und $\{s, r \vee s \rightarrow t\} \rhd t$, aber $\{p, p \rightarrow r \vee s, r \rightarrow t, r \vee s \rightarrow t\} \not\rhd t$. (Non-Redundanz)

(vi) Wenn $X \rhd B$, dann $X \backslash \{A\} \rhd A \rightarrow B$. (Vgl. Theorem (7), Seite 29)

Gegenbeispiel: $\{p, p \rightarrow r\} \rhd r$, aber $\{p \rightarrow r\} \not\rhd p \rightarrow r$. (Forderung nach wenigstens zwei Sätzen)

(vii) Wenn $X \rhd A$ und $Y \rhd A \rightarrow B$ und $X \cup Y$ konsistent, dann $X \cup Y \rhd B$.

Gegenbeispiel: $\{p, p \rightarrow q\} \rhd q$ und $\{r, r \rightarrow s\} \rhd q \rightarrow s$ und $\{p, p \rightarrow q, r, r \rightarrow s\}$ ist konsistent, aber $\{p, p \rightarrow q, r, r \rightarrow s\} \not\rhd s$. (Non-Redundanz)

(viii) Wenn $X \rhd D(c/x)$, wobei c weder in D noch in einem $C \in X$ Teilterm ist, dann $X \rhd \bigwedge xD$.[8]

Gegenbeispiel: $\{\bigwedge x(x = a \vee x = b), \neg Pb\} \rhd \neg Pc \vee c = a$ und die Teiltermbedingung ist erfüllt, aber $\{\bigwedge x(x = a \vee x = b), \neg Pb\} \not\rhd \bigwedge x(\neg Px \vee x = a)$, da etwa der Teilinhalt $\neg Pb \vee b = a$ aus $\neg Pb$ ableitbar ist.

(ix) Wenn $X \rhd \bigwedge xD$, dann $X \rhd D(t/x)$ für alle geschlossenen Terme t.

Gegenbeispiel: $\{\bigwedge x(x = a \vee x = b \vee x = c), Pa, Qb, Fc\} \rhd \bigwedge x(Px \vee Qx \vee Fx)$, aber $\{\bigwedge x(x = a \vee x = b \vee x = c), Pa, Qb, Fc\} \not\rhd Pa \vee Qa \vee Fa$. (Non-Redundanz)

(x) Wenn $X \rhd D(t/x)$ für einen geschlossenen Term t, dann $X \rhd \bigvee xD$.

Gegenbeispiel: $\{\bigvee xPx, \bigvee xPx \rightarrow \bigwedge yQy)\} \rhd Pa \vee Qa$, aber $\{\bigvee xPx, \bigvee xPx \rightarrow \bigwedge yQy)\} \not\rhd \bigvee x(Px \vee Qx)$. (Non-Redundanz)

(xi) Wenn $X \rhd \bigvee xD$ und $Y \rhd C$ und c ist nicht Teilterm eines $A \in (Y \backslash \{D(c/x)\}) \cup \{D, C\}$ und $X \cup (Y \backslash \{D(c/x)\})$ ist konsistent, dann $X \cup (Y \backslash \{D(c/x)\}) \rhd C$.

Gegenbeispiel: $\{\bigvee xPx, \bigwedge x(Px \rightarrow Qx)\} \rhd \bigvee yQy$ und $\{Qc, \bigwedge x(Px \vee Qx \rightarrow Gx)\} \rhd \bigvee xGx$ und die Teiltermbedingung ist erfüllt und $\{\bigvee xPx, \bigwedge x(Px \rightarrow Qx), \bigwedge x(Px \vee Qx \rightarrow Gx)\}$ ist konsistent, aber $\{\bigvee xPx, \bigwedge x(Px \rightarrow Qx), \bigwedge x(Px \vee Qx \rightarrow Gx)\} \not\rhd \bigvee xGx$. (Non-Redundanz)

(xii) Wenn $X \rhd A$ für alle $A \in Y$ und $Y \rhd B$, dann $X \rhd B$.

Gegenbeispiel: $\{p, p \rightarrow q \wedge s\} \rhd A$ für alle $A \in \{q, q \rightarrow s\}$ und $\{q, q \rightarrow s\} \rhd p \vee s$, aber $\{p, p \rightarrow q \wedge s\} \not\rhd p \vee s$. (Non-Redundanz)

---

[8] '$D(c/x)$' stehe für das Ergebnis der Substitution von c für x in D.

Literatur

KLEINKNECHT, R. (2006): Deduktive Ableitung und deduktive Begründung. In: Kreuzbauer, Günther; Dorn, Georg (Hgg.): Argumentation in Theorie und Praxis. Philosophie und Didaktik des Argumentierens. Wien [u.a.]: Lit (Salzburger Beiträge zu Rhetorik und Argumentationstheorie / hrsg. von Günther Kreuzbauer und Lothar Kolmer, 1), S. 17–29.

KREUZBAUER, G./DORN, G.: Einleitung. In: Kreuzbauer, Günther; Dorn, Georg (Hgg.): Argumentation in Theorie und Praxis. Philosophie und Didaktik des Argumentierens. Wien [u.a.]: Lit (Salzburger Beiträge zu Rhetorik und Argumentationstheorie / hrsg. von Günther Kreuzbauer und Lothar Kolmer, 1), S. 7–14.

QUINE, W. V. O. (1959): On Cores and Prime Implicants of Truth Functions. In: The American Mathematical Monthly, Vol. 66.9, S. 755–760.